# MAT-20400 Vektorianalyysi
# Tentti 18.5.2006

Tentissä **ei** saa käyttää **laskinta eikä taulukkokirjoja**. Kaavaliite ohessa.

**1.** Laske voimakentän

$$\mathbf{F} = 4z\mathbf{i} - x\mathbf{j} + \frac{5y}{3}\mathbf{k}$$

tekemä työ, kun sen vaikutuspiste siirtyy pisteestä $(1,1,1)$ pisteeseen $(2,4,8)$ pitkin käyrää $C$, jonka pisteille $(x,y,z)$ pätee $y = x^2$ ja $z = x^3$.

**2.** Olkoon $S$ se kartiopinnan $z = \sqrt{x^2+y^2}$ osa, joka on tasojen $z = 1$ ja $z = 2$ välissä. Oletetaan, että $S$:llä on vakiotiheys $\delta \equiv 1$. Laske $S$:n hitausmomentti $z$-akselin suhteen, ts. laske

$$I = \iint_S (x^2+y^2)\,dS.$$

**3.** Olkoon $\mathbf{F} = (x^2+y^2+z^2)(x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k})$ ja olkoon $S$ pallopinta $S = \{(x,y,z) : \ x^2+y^2+z^2 = a^2\}$, jonka origosta poispäin osoittava yksikkönormaali on $\mathbf{n}$. Laske

$$\iint_S \mathbf{F} \bullet \mathbf{n}\,dS.$$

**4.** Anna vakiot $a$ ja $b \in \mathbb{R}$ siten, että vektorikentällä $\mathbf{F} = (x+ay-z, y-x, z+bx)$ on potentiaalifunktio $\mathbb{R}^3$:ssa ja määritä ko. potentiaalifunktio.

# MAT-20400 Vektorianalyysi, kokeen kaavaliite

**1.** (1) $\nabla \times \nabla f = \mathbf{0}$
(2) $\nabla \bullet (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$
(3) $\nabla(\mathbf{F} \bullet \mathbf{G}) = \mathbf{F} \times (\nabla \times \mathbf{G}) + \mathbf{G} \times (\nabla \times \mathbf{F}) + (\mathbf{F} \bullet \nabla)\mathbf{G} + (\mathbf{G} \bullet \nabla)\mathbf{F}$
(4) $\nabla \bullet (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{G} \bullet (\nabla \times \mathbf{F}) - \mathbf{F} \bullet (\nabla \times \mathbf{G})$
(5) $\nabla \times (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{F}(\nabla \bullet \mathbf{G}) - (\mathbf{F} \bullet \nabla)\mathbf{G} + (\mathbf{G} \bullet \nabla)\mathbf{F} - \mathbf{G}(\nabla \bullet \mathbf{F})$
(6) $\nabla(fg) = (\nabla f)g + f\nabla g$
(7) $\nabla \bullet (f\mathbf{G}) = (\nabla f) \bullet \mathbf{G} + f(\nabla \bullet \mathbf{G})$
(8) $\nabla \times (f\mathbf{G}) = (\nabla f) \times \mathbf{G} + f(\nabla \times \mathbf{G})$
(9) $\nabla[h(f(\mathbf{r}))] = h'(f(\mathbf{r}))\nabla f(\mathbf{r})$

**2.** $$\int_C f\,ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t))\|\mathbf{r}'(t)\|\,dt$$

**3.** $$\int_C \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\bullet\mathbf{r}'(t)\,dt = \int_C \mathbf{F}\bullet\mathbf{T}\,ds = \int_C f_1\,dx + \int_C f_2\,dy + \int_C f_3\,dz$$

**4.** $$\oint_{\partial R} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \iint_R \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right) dx\,dy$$

**5.** $$\oint_{\partial R} \mathbf{F} \bullet \mathbf{n}\,ds = \iint_R \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y}\right) dx\,dy$$

**6.** $$\iint_S f\,dS = \iint_R f(\mathbf{r}(u,v))\|\mathbf{r}_u(u,v) \times \mathbf{r}_v(u,v)\|\,du\,dv$$

**7.** $$\iint_S f\,dS = \iint_R f(x,y,z(x,y))\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy$$

**8.** $$\iint_S \mathbf{F} \bullet \mathbf{n}\,dS = \iint_R \mathbf{F}(\mathbf{r}(u,v)) \bullet [\mathbf{r}_u(u,v) \times \mathbf{r}_v(u,v)]\,du\,dv$$

**9.** $$\iint_S \mathbf{F} \bullet \mathbf{n}\,dS = \iint_R \mathbf{F}(x,y,z(x,y)) \bullet \left(-\frac{\partial z}{\partial x}, -\frac{\partial z}{\partial y}, 1\right) dx\,dy$$

**10.** $$\iint_S \mathbf{F} \bullet \mathbf{n}\,dS = \iiint_T \nabla \bullet \mathbf{F}\,dV$$

**11.** $$\oint_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \bullet \mathbf{n}\,dS$$

**12.** $$f(\mathbf{r}) = \int_{A_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$$

**13.** $$\begin{cases} x = \rho \sin\phi \cos\theta \\ y = \rho \sin\phi \sin\theta \\ z = \rho \cos\phi \end{cases} \implies \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\phi,\theta)} = \rho^2 \sin\phi$$

$$\sin(2t) = 2\sin t\cos t \qquad \sin^2 t = \frac{1-\cos(2t)}{2} \qquad \cos^2 t = \frac{1+\cos(2t)}{2}$$