MAT-13520 Laaja Matematiikka 2u
Tentti 13.12.2010

Tentissä ei saa käyttää kirjallista materiaalia eikä laskinta.

Muista perustella ratkaisusi.

1. Oletetaan, että $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Osoita, että

a. $(\mathbf{x}+\mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{y}) = \|\mathbf{x}\|^2 - \|\mathbf{y}\|^2$,

b. $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \frac{1}{4}(\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2)$.

2. Olkoon

$$A = \begin{bmatrix}\mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 6 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & -7 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & -2 & -13 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 6},$$

jolloin

$$\operatorname{rref}(A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

a. Laske $\operatorname{rank}(A)$ ja $\operatorname{null}(A)$.

b. Etsi kanta aliavaruudelle $\mathcal{R}(A)$.

c. Etsi kanta aliavaruudelle $\mathcal{N}(A)$.

3. Olkoon $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\} \subset \mathbb{R}^n$ lineaarisesti riippumaton joukko. Oletetaan, että $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ on ei-singulaarinen ja $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m < p$. Osoita, että

a. joukko $\{A\mathbf{v}_1, \ldots, A\mathbf{v}_p\}$ on lineaarisesti riippumaton,

b. joukko $\{B\mathbf{v}_1, \ldots, B\mathbf{v}_p\}$ on lineaarisesti riippuva.

4. Olkoon

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}, \text{ missä } k \in \mathbb{R}.$$

a. Muodosta A:n karakteristinen polynomi $p(\lambda)$.

b. Etsi sellainen k:n arvo, että $\lambda = 4$ on A:n ominaisarvo.

c. Muodosta ominaisarvoa $\lambda = 4$ vastaava ominaisavaruus $\mathbb{E}_\lambda$.