

MAT-13510 Laaja Matematiikka 1U. Tentti 18.10.2010.
Esko Turunen

1. (a) Käännä lauseke

$$\forall x \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} : \exists y \in \mathbb{Z} : x = y + y \vee x = y + y + 1$$

sujuvaksi suomeksi. Onko lauseke tosi? (b) Osoita, että kaikille luonnollisille luvuille $n > 0$ pätee $\sum_{i=1}^n i = \frac{1}{2}n(n+1)$.

2. Luku $p \in \mathbb{N}, p \geq 2$, kuuluu *alkulukujen joukkoon* \mathbb{P} jos p on jaollinen vain itsellään ja luvulla 1. Todista, että alkuluvulle $p > 2$ pätee $\sqrt{p} \notin \mathbb{Q}$.

3. Tarkastellaan kompleksilukuja $a = -\sqrt{3} + i$ ja $b = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$.

- (i) Laske suoraan kertomalla $a \cdot b$.
- (ii) Esitä luvut a ja b polaarimuodossa ja eksponenttimuodossa.
- (iii) Esitä tulo $a \cdot b$ polaarimuodossa ja eksponenttimuodossa.
- (iv) Ratkaise edellisten kohtien nojalla $\cos(\frac{5\pi}{12})$:n tarkka arvo neliöjuurien avulla lausuttuna.

4. (a) Osoita jatkuvuuden määritelmään nojautuen, että $f(x) = 3x$ on jatkuva joukossa $(-\infty, \infty)$.

(b) Osoita tasaisen jatkuvuuden määritelmään nojautuen, että $g(x) = \sqrt{x}$ on tasaisesti jatkuva joukossa $S = \{x | 1 \leq x\}$.

5. Laske raja-arvo $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x + \frac{x^3}{6}}{x^5}$.

EI LASKIMIA – EI KIRJALLISUUTTA!