MAT-10444 Insinöörimatematiikka D4 u

Tentti 24.10.2011

- **Ei laskimia, ei omaa kirjallista materiaalia.**
- **Kääntöpuolella kaavakokoelma**

---

1. Tutki, leikkaako käyrä $\mathbf{r}(t) = (t,\ 3t,\ 3t^2)$ avaruuden pinnan $f(x,y) = -x-2y-4$. Jos leikkaa, niin määritä leikkauspisteet.

2. Olkoon

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} \quad \text{ja} \quad \mathbf{g}(t) = \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{bmatrix}$$

a) Laske funktion $f(x,y)$ raja-arvo origossa, jos raja-arvo on olemassa.
b) Laske **ketjusäännöllä** yhdistetyn funktion $(f \circ \mathbf{g})$ derivaatta. Sievennä vastaus mahdollisimman yksinkertaiseen muotoon. Laita laskut näkyviin.
Kaavoja: $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$, $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$, $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$.

3. Määritä funktion

$$f(x,y) = 2x^2 + 2y^2 + 8y - 2x^2y$$

ääriarvokohdat ja määrää niiden laatu, jos mahdollista, Hessen matriisin avulla.

4. Laske sen kappaleen tilavuus, jonka pohjana on xy-tason joukko

$$S = \{(x,y):\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ 4 \leq x^2+y^2 \leq 9\}$$

ja kattopintana on funktio

$$f(x,y) = \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

MAT-10444 Insinöörimatematiikka D 4u
Kaavakokoelma

1.
$$F'(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

2.
$$(G \circ F)'(\mathbf{x}) = G'(F(\mathbf{x}))F'(\mathbf{x})$$

3.
$$D_{\mathbf{e}}f(\mathbf{x}) = f'(\mathbf{x})\mathbf{e} = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}$$

4.
$$\nabla f(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) = 0$$

5.
$$T(\mathbf{x}) = F(\mathbf{a}) + F'(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a})$$

6.
$$P_2(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + f'(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a}) + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{a})^T H\, f(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a})$$

7.
$$P_m(x, y) = \sum_{j=0}^{m} \frac{1}{j!}\left((x-a)\frac{\partial}{\partial x} + (y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right)^j f(a, b)$$

8.
$$\begin{cases} g(\mathbf{x}) = 0 \\ \nabla f(\mathbf{x}) = \lambda \nabla g(\mathbf{x}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} g(\mathbf{x}) = 0 \\ h(\mathbf{x}) = 0 \\ \nabla f(\mathbf{x}) = \lambda \nabla g(\mathbf{x}) + \mu \nabla h(\mathbf{x}) \end{cases}$$

9.
$$\iint_R f(x, y)\, dx\, dy = \int_\alpha^\beta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\, dr\, d\theta$$

10.
$$\iiint_T f(x, y, z)\, dV$$
$$= \iiint_U f(\rho\sin\phi\cos\theta, \rho\sin\phi\sin\theta, \rho\cos\phi)\rho^2 \sin\phi\, d\rho\, d\theta\, d\phi$$

11.
$$m = \iiint_T \delta\, dV, \quad \overline{x} = \frac{1}{m}\iiint_T x\delta\, dV, \quad I_x = \iiint_T (y^2 + z^2)\delta\, dV$$

12.
$$\iint_A f(x, y)\, dxdy = \iint_S f(x(u, v), y(u, v)) \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| du\, dv$$

13.
$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \left(\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}\right)^{-1}$$

14.
$$\int f'(g(t))g'(t)\, dt = f(g(t)) + C$$
$$\int u(x)v'(x)\, dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\, dx + C$$
$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \ln|f(x)| + C$$