MAT-10341 Insinöörimatematiikka A 4
MAT-10343 Insinöörimatematiikka C 4
MAT-10344 Insinöörimatematiikka D 4
MAT-10345 Insinöörimatematiikka E 4

Tentti 22.4.2006

- **Ei laskimia, ei omaa kirjallista materiaalia.**

---

1. Kappale liikkuu pitkin käyrää

$$\mathbf{x}(t) = \left(\frac{t^2}{2}, \frac{4t^{\frac{3}{2}}}{3}, 2t\right)$$

Kun kappale on liikkunut käyrää pitkin origosta 6 pituusyksikköä eteenpäin ($t > 0$), niin missä avaruuden $\mathbb{R}^3$ pisteessä se silloin on.

2. **a)** Onko funktiolla

$$f(x,y) = \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

raja-arvo origossa ja jos on, niin mikä on sen arvo.
b) Laske pinnan $z = \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ pisteeseen $(x,y,z) = (2,0,1)$ piirretyn tangenttitason yhtälö.

3. Olkoon

$$\mathbf{f}(x,y) = \begin{bmatrix} \cos(x) \\ \sin(y) \\ \sqrt{x^2+y^2} \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$$

Laske derivaatat $\mathbf{f}'$ ja g' sekä **ketjusäännöllä** $(g \circ \mathbf{f})'$

4. Etsi funktion $f(x,y) = 4x - 8xy + 2y + 1$ suurin ja pienin arvo siinä suljetussa ja rajoitetussa kolmiojoukossa, jota rajoittavat suorat $x = 0$, $y = 0$ ja $x + y = 1$.

MAT-1034x Insmat 4/ Vihjeitä

1. $\mathbf{T}(t) = \dfrac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|}$, $\mathbf{n}(t) = \dfrac{\mathbf{T}'(t)}{\|\mathbf{T}'(t)\|}$

2. $s = \int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\|\,dt$

3. $\text{ala} = 2\pi \int_a^b |\,y(t)\,|\,\|\mathbf{r}'(t)\|\,dt$

4. $\kappa(s) = \|\mathbf{r}''(s)\| = \left\|\dfrac{d\mathbf{T}}{ds}\right\|$, $\kappa(t) = \dfrac{\|\mathbf{T}'(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|}$, $\kappa(t) = \dfrac{\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|^3}$

5. $F(u_1,\dots,u_m) = f\big(x_1(u_1,\dots,u_m),\ x_1(u_1,\dots,u_m)\ ,\dots,\ x_n(u_1,\dots,u_m)\big)$

$$\frac{\partial F}{\partial u_i} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial u_i} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial u_i} + \ \dots\ + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial u_i} \qquad (1 \le i \le m)$$

6. $f(\mathbf{x}) \approx f(\mathbf{x}_0) + \nabla f(\mathbf{x}_0) \bullet (\mathbf{x}-\mathbf{x}_0) + \dfrac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)^T H(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)$

7. $\begin{cases} g(x,y) = 0 \\ \nabla f + \lambda \nabla g = \mathbf{0} \end{cases}$

8. $\begin{cases} g(x,y,z) = 0 \\ h(x,y,z) = 0 \\ \nabla f + \lambda \nabla g + \mu \nabla h = \mathbf{0} \end{cases}$