

Tentaattori: Petteri Laakkonen

Huom. Ei laskinta, eikä taulukkokirjoja. Kaavaliite alla.

1. Laske alla olevat raja-arvot tai osoita, että ne eivät ole olemassa.

$$\text{a) } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{1+y^2}, \quad \text{b) } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}, \quad \text{c) } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2+x^2y^2+y^2}{x^2+y^2}.$$

2. Mitkä ovat funktion  $f(x, y) = xy^2 + 2xy + y$  pienin ja suurin arvo alueessa, jota rajaavat suorat  $y = -1$ ,  $y = 1$ ,  $x = -1$  ja  $x = 1$ , ja missä pisteissä ne saavutetaan?

3. Tarkastellaan funktiota  $f(x, y) = x^2y$ .

a) Laske funktion  $f$  kaikki toisen kertaluvun osittaisderivaatat.

b) Laske  $\iint_R f(x, y) dx dy$ , kun  $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq y \leq 2, y \leq x \leq 2\}$ .

4. Olkoon  $T \subset \mathbb{R}^3$  kappale, jota rajoittaa sivuilta sylinteripinta  $x^2 + y^2 \leq 4$  ja joka jää paraboloidin  $z = 8 - x^2 - y^2$  ja tason  $z = y + 2$  väliin. Hahmottele kappale  $T$  ja laske sen tilavuus.

### Tentin kaavaliite

i.  $f(\mathbf{x}) \approx f(\mathbf{a}) + f'(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a})$

ii. 
$$\begin{cases} g(x, y) = 0 \\ D_x f(x, y) = \lambda D_x g(x, y) \\ D_y f(x, y) = \lambda D_y g(x, y) \end{cases}$$

iii. 
$$\begin{cases} x = \rho \sin \phi \cos \theta \\ y = \rho \sin \phi \sin \theta \\ z = \rho \cos \phi \end{cases} \quad dx dy dz = \rho^2 \sin \phi d\phi d\rho d\theta$$

iv.  $m = \iiint_T \rho(\mathbf{x}) dV, \quad \bar{x} = \frac{1}{m} \iiint_T x \rho(\mathbf{x}) dV, \quad I_z = \iiint_T (x^2 + y^2)(\mathbf{x}) dV$

v.  $\sin^2 t = \frac{1 - \cos(2t)}{2}, \quad \cos^2 t = \frac{1 + \cos(2t)}{2}$

vi.  $(\mathbf{x} - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{n} = 0$