

D D Tentti 2	Insinöörimatematiikka D3
D D 12.3. 2007	MAT-10334 / Kaarakka

Vastaa jokaiseen kysymykseen ja perustele vastauksesi huolellisesti! Tentissä ei saa käyttää muistiinpanoja, kirjallisuutta eikä laskinta. Kirjoita kaikkiin papereihin nimesi, opiskelijanumerosi ja myös koulutusohjelmasi.

- Tehtävä 1.** a) Laske derivaatan määritelmän avulla $f'(2)$, kun $f(x) = x^2 + 1$.
 b) Osoita, että yhtälöllä

$$x - \frac{1}{2} \cos(x) = 0$$

on *täsmälleen* yksi reaalinen ratkaisu.

- Tehtävä 2.** Tarkastellaan funktiota f , $f(x) = \tanh(x)$.

- a) Anna funktion f lauseke sekä muodossa, jossa esiintyy hyperbolisia funktioita \sinh ja \cosh että muodossa, jossa esiintyy eksponenttifunktiota e^x . Päättele näiden avulla funktion f määrittelyjoukko ja arvojoukko.
 b) Laske funktion f derivaatta. Ilmoita vastauksesi muodossa, jossa esiintyy funktiota $\tanh(x)$.
 c) Tiedetään, että funktio f on aidosti kasvava määrittelyjoukossaan, joten sillä on käänteisfunktio f^{-1} , $f^{-1}(y) = \operatorname{artanh}(y)$. Todista käänteisfunktion derivoimissääntöä käyttäen, että

$$D \operatorname{artanh}(y) = \frac{1}{1 - y^2}.$$

Kirjoita perustelusi selvästi näkyviin.

- Tehtävä 3.** a) Laske integraali

$$\int x \ln x \, dx.$$

- b) Suppeneeko vai hajaantuuko integraali

$$\int_{-1}^1 \frac{x}{x-1} \, dx?$$

Jos integraali suppenee, niin laske sen arvo.

- Tehtävä 4.** a) Etsi potenssisarjan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} (x-2)^n$$

suppenemissäde ja suppenemisväli.

- b) Muodosta 4. asteen Taylorin polynomi, kehityskeskuksena $\frac{\pi}{2}$ funktiolle f ,

$$f(x) = 2 \cos(x).$$

Kaavoja:

$$(fg)' = f'g + fg', \quad L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|, \quad R = \frac{1}{L}, \quad \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(c)}{k!} (x-c)^k, \quad R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-c)^{n+1}.$$