MAT-10424 Insinöörimatematiikka D2 u

Tentti 13.12.2010

- **Vastaa jokainen tehtävä eri konseptille.**
- **Ei laskimia, ei omaa kirjallista materiaalia.**
- **Kääntöpuolella kaavakokoelma**

---

1. Taso kulkee pisteiden $(1,2,3)$, $(0,-1,2)$ ja $(2,1,0)$ kautta. Määritä tason

a) vektorimuoto $\mathbf{x} = \mathbf{p} + s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$

b) yleinen muoto $ax + by + cz = d$.

c) Mikä on pisteen $(3,2,-1)$ etäisyys tästä tasosta?

2. Millä vakioiden c, $d \in \mathbb{R}$ arvoilla yhtälöryhmällä

a) on yksikäsitteinen ratkaisu? Esitä ratkaisu.

b) on äärettömän monta ratkaisua? Esitä ratkaisu.

c) ei ole lainkaan ratkaisua?

$$\begin{cases} x + 2y + z &= 0 \\ x + y &= 0 \\ \quad -y + cz &= d \end{cases}$$

3. Matriisi A on muutettu redusoituun vaakariviporrasmuotoon R

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \quad \longrightarrow \quad R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Esitä jokin matriisin A riviavaruuden ja sarakeavaruuden kanta.

b) Mitä on $\det(A)$? Perustele ratkaisusi.

c) Esitä yhtälöryhmän $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ratkaisu.

4. Määritä matriisin B ominaisarvot ja ominaisavaruudet=ominaisvektorien muodostamat aliavaruudet. Määritä myös algebralliset ja geometriset kertaluvut.

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Natalia Kauru

MAT-10424 Insinöörimatematiikka D2 u, kaavoja

1. $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}$

2. $\cos(\theta) = \dfrac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|}$

3. $\mathrm{proj}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) = \left(\dfrac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}\right) \mathbf{u}$

4. $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p}) = 0$

5. $\mathbf{x} = \mathbf{p} + s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$

6. $(AB)^T = B^T A^T,\ (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1},\ (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

7. $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

8. $[\mathbf{x}]_{\mathcal{E}} = U[\mathbf{x}]_{\mathcal{U}},\quad [\mathbf{x}]_{\mathcal{U}} = U^{-1}[\mathbf{x}]_{\mathcal{E}}$

9. $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x},\ A = \begin{bmatrix} T(\mathbf{e}_1) & T(\mathbf{e}_2) & \cdots & T(\mathbf{e}_n) \end{bmatrix}$

10. $\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$

11. $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x},\ \det(A - \lambda I) = 0$

12. $P^{-1}AP = D \Leftrightarrow A = PDP^{-1}$

13. $\mathbf{v}_1 = \mathbf{x}_1,\ \mathbf{v}_k = \mathbf{x}_k - \sum_{i=1}^{k-1} \left(\dfrac{\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{x}_k}{\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i}\right) \mathbf{v}_i$

14. $A^T A\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$