Insinöörimatematiikka D 2

Tentti 28.11.2008

Ei laskinta tai kirjallista materiaalia.

Kurssilla esiintyneitä kaavoja:

$$\mathrm{proj}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u} = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}\mathbf{v}, \qquad x_i = \frac{\det(A_i(\mathbf{b}))}{\det A}, \qquad A^{-1} = \frac{1}{\det A}[C_{ij}]^T, \qquad \bar{\mathbf{x}} = \left(A^TA\right)^{-1}A^T\mathbf{b}$$

Esitä tehtävät 1 ja 2 yhdellä konseptilla ja tehtävät 3 ja 4 toisella. Laita molempiin konsepteihin nimesi ja opiskelijanumerosi.

1. Seuraavat vektorit kuuluvat erääseen $\mathbb{R}^4$:n aliavaruuteen.

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}, \ \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}, \ \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix}3\\2\\0\\0\end{bmatrix}, \ \mathbf{x}_4 = \begin{bmatrix}0\\1\\3\\3\end{bmatrix}, \ \mathbf{x}_5 = \begin{bmatrix}0\\0\\2\\2\end{bmatrix}$$

   (a) Valitse näistä vektoreista sellaiset, jotka sopivat ko. aliavaruuden kannaksi. Vastauksesta tulee käydä matemaattisesti ilmi, miksi valitut vektorit sopivat.

   (b) Onko valitsemasi kanta ortogonaalinen? Entä onko olemassa symmetristä matriisia, jonka sarakkeina ovat (a)-kohdassa valitsemasi kantavektorit (jossain järjestyksessä)? Perustele vastauksesi.

2. Selvitä matriisin A käänteismatriisi ja determinantti. (Huom. Ei välttämättä tarvitse käyttää adjungoitua matriisia.)

$$A = \begin{bmatrix}4 & -2 & 1\\3 & -3 & -2\\-1 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

Esitä tehtävät 1 ja 2 yhdellä konseptilla ja tehtävät 3 ja 4 toisella. Laita molempiin konsepteihin nimesi ja opiskelijanumerosi.

3. Muistutukseksi: matriisit A ja B ovat **similaariset**, kun $A = PBP^{-1}$, missä P on jokin kääntyvä matriisi.

   (a) Todista, että jos matriisi A on **diagonalisoituva**, niin A^T on diagonalisoituva.

   (b) Diagonalisoi lineaarikuvaukseen $f(x,y) = \begin{bmatrix}4x\\2x+y\end{bmatrix}$ liittyvä matriisi.

4. Valitse tehtävässä 1 mainituista vektoreista kolme vektoria joukoksi C siten, että mitkään kaksi C:n vektoria eivät ole ortogonaaliset. Ortogonalisoi joukko C Gram–Schmidt-menetelmällä. Normalisoi ortogonalisoitu vektorijoukko vielä ortonormaaliksi joukoksi.