

D D Tenti Insinöörimatematiikka D2
D D 1.12.2007 MAT-10324 / Kaarakka

Vastaa jokaiseen kysymykseen ja perustele vastauksesi huolellisesti! Tehtävissä 3 riittää pelkkä vastaus. Tentissä ei saa käyttää muistinpäonoja, kirjallisuutta eikä laskinta.

Kirjoita kaikkiin papereihin selkeästi nimesi, opiskelijanumerosi ja myös koulutusohjelmasi.

1. Tarkastellaan matriiseja

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 0 & 1 \\ 2 & -9 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

- (a) Laske, jos mahdollista, $2AB$ ja $-B^2$.
 (b) Laske, jos mahdollista, B^{-1} .
 (c) Laske, jos mahdollista, $\det(A)$.

2. (a) Etsi matriisin $A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ sarakeavaruuden kanta ja dimensio.

(b) Etsi matriisin $A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ nolla-avaruuden kanta ja dimensio.

(c) Olkoot B ja C $n \times n$ -matriiseja. Osoita, että jos $B \sim C$ (eli matriisi B on similaarinen matriisin C kanssa), niin $\det(B) = \det(C)$.

3. Vastaa lyhyesti (a)-(f) kohtien kysymyksiin. Jokaisen kohdan oikeasta vastauksesta saat yhden pisteen, väärästä vastauksesta vähennetään yksi piste ja vastaamatta jättäminen on nolla pistettä. Tehtävän kokonaispistemäärä ei kuitenkaan mene negatiiviseksi.

Tarkastellaan 4×4 -matriisia B , jolle $\dim(\text{col}(B)) = 3$.

- (a) Onko matriisi B kääntyvä?
 (b) Mikä on matriisin B aste?
 (c) Mitä on $\dim(\text{null}(B))$?
 (d) Onko matriisin B redusoitu vaakariviporrasmuoto L_4 ?
 (e) Laske $\det(B)$.
 (f) Jos $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^4$, voiko matriisiyhtälöä $B\mathbf{x} = \mathbf{b}$ olla ratkaisuja ääretön määrä?

4. Olkoon

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- (a) Etsi matriisin C ominaisarvot.
 (b) Etsi matriisin C ominaisarvoja vastaavat ominaisavaruudet.
 (c) Etsi sellainen matriisi Q , jolle matriisitulosta $Q^T C Q$ saadaan diagonaalimatriisi.