

Vastaa jokaiseen kysymykseen ja perustele vastauksesi huolellisesti! Tentissä ei saa käyttää muistiinpanoja, kirjallisuutta eikä laskinta.

Kirjoita kaikkiin papereihin selkeästi nimesi, opiskelijanumerosi ja myös koulutusohjelmasi. Lisäksi jätä etusivulle ja marginaaleihin tilaa tarkastajan merkintöjä varten.

1. Osoita, että

$$p \Rightarrow q = \neg p \vee q.$$

2. Esitä tason \mathcal{P} yhtälö sekä vektorimuodossa ($\mathbf{x} = \mathbf{p} + t\mathbf{u} + s\mathbf{v}$, $t, s \in \mathbb{R}$) että yleisessä muodossa ($ax + by + cz + d = 0$), kun taso kulkee pisteen $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ kautta ja on yhdensuuntainen tason $2x - 3y + z - 2 = 0$ kanssa.

3. Kompleksiluvun z kolmas juuri on $w_0 = 2e^{\frac{\pi}{2}j}$.

(a) Laske z ja $\frac{1}{z}$ muodossa $x + yj$.

(b) Anna kompleksiluvun z kaikki toisistaan poikkeavat kolmannet juuret ($z^{\frac{1}{3}}$).

4. (a) Muodosta redusoidussa vaakariviporrasmuodossa oleva matriisi, joka on vaakariviekvivalentti matriisiin A kanssa, kun

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 5 \\ -3 & -1 & 1 & -7 \end{bmatrix}.$$

- (b) Yhtälöryhmän H kokonaismatriisi on vaakariviekvivalentti matriisiin B kanssa, kun

$$H = \begin{cases} 2x_1 & -10x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + 9x_3 = 6 \\ x_2 + x_3 = 4. \end{cases} \quad \text{ja} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Etsi yhtälöryhmän ratkaisu vektorimuodossa.

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p}) = 0, \quad \mathbf{s} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} \mathbf{u},$$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{bmatrix}$$