D D Tentti Insinöörimatematiikka D1
D D 12.10. 2006 MAT-10314 / Kaarakka

Vastaa jokaiseen kysymykseen ja perustele vastauksesi huolellisesti! Tentissä ei saa käyttää muistiinpanoja, kirjallisuutta eikä laskinta.

Kirjoita kaikkiin papereihin selkeästi nimesi, opiskelijanumerosi ja myös koulutusohjelmasi. Lisäksi jätä etusivulle ja marginaaleihin tilaa tarkastajan merkintöjä varten.

1. Todista induktioperiaatetta käyttäen, että

$$\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}=1-\frac{1}{2^n},\ \forall n\in\mathbb{N}.$$

2. (a) Olkoon $z=a+bj$, $a\in\mathbb{R}$, $b\in\mathbb{R}$. Laske $z+2\overline{z}$ ja $\overline{z}^2$.

   (b) Tarkastellaan kompleksilukua $z=j$, etsi z:n kaikki toisistaan poikkeavat toiset juuret $(z^{\frac{1}{2}})$.

   (c) Tarkastellaan polynomia $P(z)=z^4+1$. Kuinka monta nollakohtaa polynomilla on joukossa $\mathbb{C}$?

3. (a) Määrää suoran, joka kulkee pisteiden $\begin{bmatrix}-1\\-1\\2\end{bmatrix}$ ja $\begin{bmatrix}2\\1\\-2\end{bmatrix}$ kautta, yhtälö haluamassasi muodossa.

   (b) Mikä on pisteen $\mathbf{p}=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$ etäisyys suorasta $\mathbf{x}=\begin{bmatrix}-1\\1\\2\end{bmatrix}t+\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$?

4. (a) Muodosta redusoidussa vaakariviporrasmuodossa oleva matriisi, joka on vaakariviekvivalentti matriisin A kanssa, kun

$$A=\begin{bmatrix}1&0&-1&2\\2&1&0&5\\-3&-1&1&-7\end{bmatrix}.$$

   (b) Yhtälöryhmän H kokonaismatriisi on vaakariviekvivalentti matriisin B kanssa, kun

$$H=\begin{cases}2x_1 \qquad -10x_3=2\\ 2x_1+x_2-9x_3=6\\ \qquad x_2+x_3=4.\end{cases}\quad \text{ja } B=\begin{bmatrix}1&0&-5&1\\0&1&1&4\\0&0&0&0\end{bmatrix}.$$ $x_1 = 5t+1$

   Etsi yhtälöryhmän H ratkaisu vektorimuodossa.

$$\mathbf{n}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{p})=0,\qquad \mathbf{s}=\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}}\mathbf{u},$$

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v}=\begin{bmatrix}u_2v_3-u_3v_2\\u_3v_1-u_1v_3\\u_1v_2-u_2v_1\end{bmatrix}.$$