

Vastaa jokaiseen kysymykseen ja perustele vastauksesi huolellisesti! Tentissä ei saa käyttää muistiinpanoja, kirjallisuutta eikä laskinta.

Kirjoita kaikkiin papereihin selkeästi nimesi, opiskelijanumerosi ja myös koulutusohjelmasi.

1. Todista induktioperiaatetta käyttäen, että

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) = k^2, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

2. Taso  $\mathcal{P}$  on suorien  $l_1 : \mathbf{x} = [1, 1, 1]t + [3, 2, 1]$ ,  $t \in \mathbb{R}$  ja  $l_2 : \mathbf{x} = [-2, 1, 2]s + [1, -2, 2]$ ,  $s \in \mathbb{R}$  suuntainen ja kulkee pisteen  $[-1, -1, 2]$  kautta.

(a) Määritä tason  $\mathcal{P}$  yhtälö muodossa  $ax + by + cz + d = 0$ .

(b) Piste  $\mathbf{p} = [1, 0, -1] \in l_1$ . Mikä on pisteen  $\mathbf{p}$  lyhyin etäisyys suorasta  $l_2$ ?

3. Kompleksiluvun  $z$  kolmas juuri on  $w_0 = 2e^{\frac{\pi}{2}j}$ .

(a) Laske  $w_0^4$ .

(b) Laske  $z$  ja  $\frac{1}{z}$  muodossa  $x + yj$ .

(c) Anna kompleksiluvun  $z$  kaikki toisistaan poikkeavat kolmannet juuret.

4. Selvitä, käyttäen Gauss-Jordan eliminointimenetelmää, leikkaavatko tasot  $x - y + z = 3$  ja  $2x - 3y + z = 5$ . Jos tasot leikkaavat, niin määritä ratkaisujoukko. Onko ratkaisujoukko piste, suora tai taso?

Mm. tällaisia kaavoja löytyi luennoista ja Perttulan monisteesta.

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p}) = 0, \quad \mathbf{s} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} \mathbf{u},$$

$$|\delta| = |\mathbf{n}_0 \cdot (\mathbf{x}_0 - \mathbf{p})|, \quad d = \frac{|(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{v}|}{\|\mathbf{v}\|}$$

$$d = \frac{|(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \cdot (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2)|}{\|\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2\|}, \quad e = \frac{|\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0)|}{\|\mathbf{n}\|}$$