

Algoritmimatemiikka

Tentti 17.10.2011

Ei laskinta tai kirjallista materiaalia. Tautologia- ja inferenssikokoelma kääntöpuolella.

Perustele kaikki vastauksesi!

- (a) Todista, että x on pariton jos ja vain jos x^2 on pariton. (4p)
(b) Funktio cons liittyy alkion jonoon. Mitä on $f(2)$ (näytä myös kaikki välivaiheet)? (2p)

$$f(n) = \begin{cases} \langle 0 \rangle, & \text{kun } n = 0 \\ \text{cons}(n, f(n-1)) & \text{kun } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

- Olkoon $A = \{1, 2, 5, 6\}$. Määritellään relaatio $S \subseteq A \times A$ seuraavasti:

$$aSb \Leftrightarrow a \bmod 3 = b \bmod 4.$$

- Esitä alkioittain sulkeumat $r(S)$, $s(S)$ ja $t(S)$ (refleksiivinen, symmetrinen ja transitii-
vinen).
 - Onko jokin sulkeumajoukoista $r(S)$, $s(S)$ tai $t(S)$ osittainen järjestys? Perustele miksi
on tai ei ole. Jos on, esitä Hasen diagrammi.
- Olkoon $C = \{1, 2, 3\}$. Tarkastellaan funktiota $F : \text{Lists}[C] \rightarrow \mathcal{P}(C)$ (missä $\mathcal{P}(C)$ on joukon
 C potenssijoukko), joka on määritelty kaavalla

$$F(\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}.$$

- Mitkä ovat (mahdollisimman sievennetyssä muodossa) alkion $\langle 1, 2, 1, 1, 2 \rangle \in \text{Lists}[C]$
kuva ja alkion $\emptyset \in \mathcal{P}(C)$ alkukuva funktiossa F ?
 - Onko F injektio? Todista tai näytä vastaesimerkki.
 - Onko F surjektio? Todista tai näytä vastaesimerkki.
 - Onko tehtävän 2 relaatio S funktio? Selitä miksi on tai miksi ei ole.
- Mitkä ovat seuraavan teorian premissit ja johtopäätös? Todista teoria inferenssitodistuksella.

$$((A \vee B) \rightarrow (C \wedge D)) \rightarrow (B \rightarrow D).$$

Antti Mutanen

Loogisia ekvivalensseja eli tautologioita

Negaatio	Disjunktio	Konjunktio	Implikaatio
$\neg\neg p = p$	$p \vee \mathbf{t} = \mathbf{t}$ $p \vee \mathbf{e} = p$ $p \vee p = p$ $p \vee \neg p = \mathbf{t}$	$p \wedge \mathbf{t} = p$ $p \wedge \mathbf{e} = \mathbf{e}$ $p \wedge p = p$ $p \wedge \neg p = \mathbf{e}$	$p \rightarrow \mathbf{t} = \mathbf{t}$ $p \rightarrow \mathbf{e} = \neg p$ $\mathbf{t} \rightarrow p = p$ $\mathbf{e} \rightarrow p = \mathbf{t}$ $p \rightarrow p = \mathbf{t}$ $p \rightarrow q = \neg p \vee q$ $p \rightarrow q = \neg q \rightarrow \neg p$ $\neg(p \rightarrow q) = p \wedge \neg q$

Vaihdantalait	Liitântälait	Osittelulait
$p \wedge q = q \wedge p$ $p \vee q = q \vee p$	$p \wedge (q \wedge r) = (p \wedge q) \wedge r$ $p \vee (q \vee r) = (p \vee q) \vee r$	$p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ $p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

De Morganin lait	Absorptio
$\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$ $\neg(p \vee q) = \neg p \wedge \neg q$	$p \wedge (p \vee q) = p$ $p \vee (p \wedge q) = p$ $p \wedge (\neg p \vee q) = p \wedge q$ $p \vee (\neg p \wedge q) = p \vee q$

Inferenssisääntöjä

MP $\frac{A, A \rightarrow B}{\therefore B}$	MT $\frac{A \rightarrow B, \neg B}{\therefore \neg A}$	Conj $\frac{A, B}{\therefore A \wedge B}$	Simp $\frac{A \wedge B}{\therefore A}$
Add $\frac{A}{\therefore A \vee B}$	DS $\frac{A \vee B, \neg B}{\therefore A}$	HS $\frac{A \rightarrow B, B \rightarrow C}{\therefore A \rightarrow C}$	

muista rajoitukset

UI $\frac{\forall x W(x)}{\therefore W(t)}$	UG $\frac{W(t)}{\therefore \forall x W(x)}$	EG $\frac{W(t)}{\therefore \exists x W(x)}$	EI $\frac{\exists x W(x)}{\therefore W(t)}$
---	---	---	---

Ekvivalensseja

$\neg\forall x W(x) = \exists x \neg W(x)$ $\exists x (A(x) \vee B(x)) = \exists x A(x) \vee \exists x B(x)$ $\exists x (A(x) \rightarrow B(x)) = \forall x A(x) \rightarrow \exists x B(x)$ $\exists x \exists y W(x, y) = \exists y \exists x W(x, y)$	$\neg\exists x W(x) = \forall x \neg W(x)$ $\forall x (A(x) \wedge B(x)) = \forall x A(x) \wedge \forall x B(x)$ $\forall x \forall y W(x, y) = \forall y \forall x W(x, y)$
---	--

$\forall x (C \vee A(x)) = C \vee \forall x A(x)$ $\exists x (C \vee A(x)) = C \vee \exists x A(x)$ $\forall x (C \rightarrow A(x)) = C \rightarrow \forall x A(x)$ $\forall x (A(x) \rightarrow C) = \exists x A(x) \rightarrow C$	$\forall x (C \wedge A(x)) = C \wedge \forall x A(x)$ $\exists x (C \wedge A(x)) = C \wedge \exists x A(x)$ $\exists x (C \rightarrow A(x)) = C \rightarrow \exists x A(x)$ $\exists x (A(x) \rightarrow C) = \forall x A(x) \rightarrow C$
--	--

Implikaatioita

$\forall x A(x) \Rightarrow \exists x A(x)$ $\forall x A(x) \vee \forall x B(x) \Rightarrow \forall x (A(x) \vee B(x))$ $\exists y \forall x W(x, y) \Rightarrow \forall x \exists y W(x, y)$	$\exists x (A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow \exists x A(x) \wedge \exists x B(x)$ $\forall x (A(x) \rightarrow B(x)) \Rightarrow \forall x A(x) \rightarrow \forall x B(x)$
---	--