RUI
RUP

Algoritmimatematiikka
Tentti 10.05.2011
Ei laskinta tai kirjallista materiaalia. Tautologia- ja interferenssikokoelma kääntöpuolella.

Esitä tehtävät 1 ja 2 yhdellä konseptilla ja tehtävät 3 ja 4 toisella.
Laita molempiin konsepteihin nimesi ja opiskelijanumerosi.

1. Olkoon $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} : x = 2n - 1, n \leq 3\}$ ja $C = \{2, 3, 5\}$

   (a) Esitä alkioittain joukko $A^2 \cap B \times (A \cup C)$. Kirjoita kaikki tarvittavat välivaiheet vastauspaperiisi. (3p)

   (b) Esittääkö kohdan (a) joukko funktiota? Perustele. (1p)

   (c) Todista vastaesimerkillä (ei totuustaululla), että seuraava teoria ei ole pätevä. (2p)

$$(p \vee q) \rightarrow (r \rightarrow p) \wedge (\neg r \rightarrow q).$$

2. Olkoon $f : \text{Lists}[A] \rightarrow A$,

$$f(L) = \begin{cases} \emptyset, & \text{jos } L = \langle\rangle \\ \{\text{head}(L)\} \cup f(\text{tail}(L)), & \text{muulloin} \end{cases}$$

   (a) Esittele kaikki rekursion välivaiheet näyttäen, mitä on $f(\langle 1, 2, 3, 2, 1, 2\rangle)$ sievennetyssä muodossa. Vihje: $\{\}$ ovat joukkosulkeet. (3p)

   (b) Olkoon funktio g esitetty sisä- eli infix-muodossa $g(x) = x^2$ ja funktio h ulko- eli prefix-muodossa $h = + \circ \langle g \circ \cos, g \circ \sin\rangle$. Esitä lauseke $h(x)$ sisämuodossa kaikki sievennyksen välivaiheet näyttäen ja vastaa kysymykseen: mitä on $h(0)$? (3p)

Esitä tehtävät 1 ja 2 yhdellä konseptilla ja tehtävät 3 ja 4 toisella.
Laita molempiin konsepteihin nimesi ja opiskelijanumerosi.

3. Seuraavassa on aloitettu todistamaan epäsuoralla todistuksella erästä teoriaa, jonka johtopäätös on $A \vee B$.

1.	$C \rightarrow A$		P
2.	$\neg C \rightarrow B$		P
3.		$\neg(A \vee B)$	P (IP)

   (a) Mitkä ovat teorian premissit sekä teorian lauseke? (1p)

   (b) Kirjoita todistus (interferenssitodistuksena) loppuun asti. (5p)

4. Olkoon $D = \{b, s, h, v, q\}$.

   (a) Muodosta relaatiolle $K : D \leftrightarrow D$, $K = \{\langle b, s\rangle, \langle v, h\rangle, \langle q, q\rangle, \langle s, v\rangle\}$ refleksiivinen sulkeuma, symmetrinen sulkeuma ja transitiivinen sulkeuma. (3p)

   (b) Esitä alkioittain relaatio $R : D \leftrightarrow D$, joka toteuttaa kaikki seuraavat ehdot: R on irrefleksiivinen osittainen järjestys ja joukon R mahtavuus on 5. Piirrä osittaisesta järjestyksestä R Hassen diagrammi. (3p)

Antti Mutanen

Loogisia ekvivalensseja eli tautologioita

Negaatio	Disjunktio	Konjunktio	Implikaatio
$\neg\neg p = p$	$p \vee \mathbf{t} = \mathbf{t}$	$p \wedge \mathbf{t} = p$	$p \to \mathbf{t} = \mathbf{t}$
	$p \vee \mathbf{e} = p$	$p \wedge \mathbf{e} = \mathbf{e}$	$p \to \mathbf{e} = \neg p$
	$p \vee p = p$	$p \wedge p = p$	$\mathbf{t} \to p = p$
	$p \vee \neg p = \mathbf{t}$	$p \wedge \neg p = \mathbf{e}$	$\mathbf{e} \to p = \mathbf{t}$
			$p \to p = \mathbf{t}$
			$p \to q = \neg p \vee q$
			$p \to q = \neg q \to \neg p$
			$\neg(p \to q) = p \wedge \neg q$

Vaihdantalait	Liitäntälait	Osittelulait
$p \wedge q = q \wedge p$	$p \wedge (q \wedge r) = (p \wedge q) \wedge r$	$p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
$p \vee q = q \vee p$	$p \vee (q \vee r) = (p \vee q) \vee r$	$p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

De Morganin lait	Absorptio
$\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$	$p \wedge (p \vee q) = p$
$\neg(p \vee q) = \neg p \wedge \neg q$	$p \vee (p \wedge q) = p$
	$p \wedge (\neg p \vee q) = p \wedge q$
	$p \vee (\neg p \wedge q) = p \vee q$

Inferenssisääntöjä

MP	**MT**	**Conj**	**Simp**
$\dfrac{A,\ A \to B}{\therefore B}$	$\dfrac{A \to B,\ \neg B}{\therefore \neg A}$	$\dfrac{A,\ B}{\therefore A \wedge B}$	$\dfrac{A \wedge B}{\therefore A}$
Add	**DS**	**HS**	
$\dfrac{A}{\therefore A \vee B}$	$\dfrac{A \vee B,\ \neg B}{\therefore A}$	$\dfrac{A \to B,\ B \to C}{\therefore A \to C}$	

muista rajoitukset

UI	**UG**	**EG**	**EI**
$\dfrac{\forall x\, W(x)}{\therefore W(t)}$	$\dfrac{W(t)}{\therefore \forall x\, W(x)}$	$\dfrac{W(t)}{\therefore \exists x\, W(x)}$	$\dfrac{\exists x\, W(x)}{\therefore W(t)}$

Ekvivalensseja

$\neg\forall x\, W(x) = \exists x\, \neg W(x)$	$\neg\exists x\, W(x) = \forall x\, \neg W(x)$
$\exists x\, (A(x) \vee B(x)) = \exists x\, A(x) \vee \exists x\, B(x)$	$\forall x\, (A(x) \wedge B(x)) = \forall x\, A(x) \wedge \forall x\, B(x)$
$\exists x\, (A(x) \to B(x)) = \forall x\, A(x) \to \exists x\, B(x)$	$\forall x\, \forall y\, W(x, y) = \forall y\, \forall x\, W(x, y)$
$\exists x\, \exists y\, W(x, y) = \exists y\, \exists x\, W(x, y)$	

$\forall x\, (C \vee A(x)) = C \vee \forall x\, A(x)$	$\forall x\, (C \wedge A(x)) = C \wedge \forall x\, A(x)$
$\exists x\, (C \vee A(x)) = C \vee \exists x\, A(x)$	$\exists x\, (C \wedge A(x)) = C \wedge \exists x\, A(x)$
$\forall x\, (C \to A(x)) = C \to \forall x\, A(x)$	$\exists x\, (C \to A(x)) = C \to \exists x\, A(x)$
$\forall x\, (A(x) \to C) = \exists x\, A(x) \to C$	$\exists x\, (A(x) \to C) = \forall x\, A(x) \to C$

Implikaatioita

$\forall x\, A(x) \Rightarrow \exists x\, A(x)$	$\exists x\, (A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow \exists x\, A(x) \wedge \exists x\, B(x)$
$\forall x\, A(x) \vee \forall x\, B(x) \Rightarrow \forall x\, (A(x) \vee B(x))$	$\forall x\, (A(x) \to B(x)) \Rightarrow \forall x\, A(x) \to \forall x\, B(x)$
$\exists y\, \forall x\, W(x, y) \Rightarrow \forall x\, \exists y\, W(x, y)$	