Algoritmimatematiikka
Tentti 26.10.2009

Ei laskinta tai kirjallista materiaalia. Tautologia- ja interferenssikokoelma kääntöpuolella.

1. Olkoon $A = \{1, 3, 6, 8\}$. Joukossa A on määritelty seuraavat relaatiot

$$\begin{aligned} R: &\quad aRb \Leftrightarrow a|b \\ S: &\quad aSb \Leftrightarrow a \bmod b \neq 0 \end{aligned}$$

   Esitä joukko $R \cap S$ alkioittain. Selitä perustellen, onko kumpikaan relaatioista $s(R)$ ja $s(S)$ ekvivalenssirelaatio. (Merkinnät $s(R)$ ja $s(S)$ tarkoittavat relaatioiden R ja S symmetrisiä sulkeumia.)

2. (a) Todista $3n^2 - 2n + 3 = \Theta(n^2)$, missä $n \in \mathbb{N}$.

   (b) Valitse seuraavista lausekkeista sellainen, joka on täydellisessä konjunktiivisessa normaalimuodossa. Todista ko. lausekkeen väittämä joko tautologiaksi totuustaululla tai vääräksi vastaesimerkillä.

$$p \vee q \to p \wedge q, \qquad (p \vee q) \wedge (p \vee \neg q), \qquad (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q), \qquad q \vee (p \vee \neg q)$$

3. Tarkastellaan teoriaa

$$((A \to \neg C) \to D) \wedge \neg (B \to D) \to A \vee \neg B \vee C.$$

   Mitkä ovat sen premissit ja mikä on sen johtopäätös? Todista teoria päteväksi loogisen päättelyn keinoin (käyttämättä totuustaulua).

4. (a) Esitä joukko $\{-5, -2, 1, 4, 7, \ldots\}$ induktiivisesti. (2p.)

   (b) Tarkastellaan rekursiivisesti esitettyä funktiota

$$f(2) = 3, \qquad f(n+2) = f(n) + 2n.$$

   Esitä funktio f tavanomaisessa esitysmuodossa $f : A \to B$, $f(x) = \ldots$ Ilmoita funktion kaavan lisäksi joukot A ja B muodossa $\{x \in \mathbb{N} : x = \ldots\}$ siten että maalijoukkona B on funktion f arvojoukko, ts. siten että f on bijektio. Todista f:n injektiivisyys ja surjektiivisuus ko. käsitteiden määritelmien avulla. (4p.)

Antti Mutanen

Loogisia ekvivalensseja eli tautologioita

Negaatio	Disjunktio	Konjunktio	Implikaatio
$\neg\neg p = p$	$p \vee \mathbf{t} = \mathbf{t}$	$p \wedge \mathbf{t} = p$	$p \rightarrow \mathbf{t} = \mathbf{t}$
	$p \vee \mathbf{e} = p$	$p \wedge \mathbf{e} = \mathbf{e}$	$p \rightarrow \mathbf{e} = \neg p$
	$p \vee p = p$	$p \wedge p = p$	$\mathbf{t} \rightarrow p = p$
	$p \vee \neg p = \mathbf{t}$	$p \wedge \neg p = \mathbf{e}$	$\mathbf{e} \rightarrow p = \mathbf{t}$
			$p \rightarrow p = \mathbf{t}$
			$p \rightarrow q = \neg p \vee q$
			$p \rightarrow q = \neg q \rightarrow \neg p$
			$\neg(p \rightarrow q) = p \wedge \neg q$

Vaihdantalait	Liitäntälait	Osittelulait
$p \wedge q = q \wedge p$	$p \wedge (q \wedge r) = (p \wedge q) \wedge r$	$p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
$p \vee q = q \vee p$	$p \vee (q \vee r) = (p \vee q) \vee r$	$p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

De Morganin lait	Absorptio
$\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$	$p \wedge (p \vee q) = p$
$\neg(p \vee q) = \neg p \wedge \neg q$	$p \vee (p \wedge q) = p$
	$p \wedge (\neg p \vee q) = p \wedge q$
	$p \vee (\neg p \wedge q) = p \vee q$

Inferenssisääntöjä

MP $\dfrac{A,\ A \rightarrow B}{\therefore B}$	**MT** $\dfrac{A \rightarrow B,\ \neg B}{\therefore \neg A}$	**Conj** $\dfrac{A,\ B}{\therefore A \wedge B}$	**Simp** $\dfrac{A \wedge B}{\therefore A}$
Add $\dfrac{A}{\therefore A \vee B}$	**DS** $\dfrac{A \vee B,\ \neg B}{\therefore A}$	**HS** $\dfrac{A \rightarrow B,\ B \rightarrow C}{\therefore A \rightarrow C}$	

muista rajoitukset

UI $\dfrac{\forall x\, W(x)}{\therefore W(t)}$	**UG** $\dfrac{W(t)}{\therefore \forall x\, W(x)}$	**EG** $\dfrac{W(t)}{\therefore \exists x\, W(x)}$	**EI** $\dfrac{\exists x\, W(x)}{\therefore W(t)}$

Ekvivalensseja

$\neg\forall x\, W(x) = \exists x\, \neg W(x)$	$\neg\exists x\, W(x) = \forall x\, \neg W(x)$
$\exists x\, (A(x) \vee B(x)) = \exists x\, A(x) \vee \exists x\, B(x)$	$\forall x\, (A(x) \wedge B(x)) = \forall x\, A(x) \wedge \forall x\, B(x)$
$\exists x\, (A(x) \rightarrow B(x)) = \forall x\, A(x) \rightarrow \exists x\, B(x)$	$\forall x\, \forall y\, W(x,y) = \forall y\, \forall x\, W(x,y)$
$\exists x\, \exists y\, W(x,y) = \exists y\, \exists x\, W(x,y)$	

$\forall x\, (C \vee A(x)) = C \vee \forall x\, A(x)$	$\forall x\, (C \wedge A(x)) = C \wedge \forall x\, A(x)$
$\exists x\, (C \vee A(x)) = C \vee \exists x\, A(x)$	$\exists x\, (C \wedge A(x)) = C \wedge \exists x\, A(x)$
$\forall x\, (C \rightarrow A(x)) = C \rightarrow \forall x\, A(x)$	$\exists x\, (C \rightarrow A(x)) = C \rightarrow \exists x\, A(x)$
$\forall x\, (A(x) \rightarrow C) = \exists x\, A(x) \rightarrow C$	$\exists x\, (A(x) \rightarrow C) = \forall x\, A(x) \rightarrow C$

Implikaatioita

$\forall x\, A(x) \Rightarrow \exists x\, A(x)$	$\exists x\, (A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow \exists x\, A(x) \wedge \exists x\, B(x)$
$\forall x\, A(x) \vee \forall x\, B(x) \Rightarrow \forall x\, (A(x) \vee B(x))$	$\forall x\, (A(x) \rightarrow B(x)) \Rightarrow \forall x\, A(x) \rightarrow \forall x\, B(x)$
$\exists y\, \forall x\, W(x,y) \Rightarrow \forall x\, \exists y\, W(x,y)$	