Algoritmimatematiikka
Tentti 23.11.2009
Ei laskinta tai kirjallista materiaalia. Tautologia- ja interferenssikokoelma kääntöpuolella.

1. Joukosta A tiedetään seuraavaa: $|A| = 3$ ja lisäksi $\exists x \in A \forall y \in A : ((y \neq x) \Rightarrow p(x,y))$. Anna esimerkki joukosta A kunkin kolmen alla annetun $p(x,y)$:n tapauksessa. Esitä esimerkkisi perusteluna millä tavalla A:n alkiot toteuttavat tarvittavat ehdot.
   (a) $p(x,y) =$ "$xy = 0$"
   (b) $p(x,y) =$ "$x \neq 0$ ja $x \bmod y = 0$"
   (c) $p(x,y) =$ "$x \cap y \neq \emptyset$"
   Huom. Kohdan (c) alkiot x ja y ovat joukkoja (yleensä merkitään isoilla kirjaimilla).

2. Olkoon $R = \{\langle 1,2\rangle, \langle 1,a\rangle, \langle 2,b\rangle, \langle a,b\rangle\}$.
   (a) Kun B on pienin mahdollinen joukko, jolle $R \subseteq B \times B$, mitä ovat $r(R)$ (eli R:n refleksiivinen sulkeuma), $s(R)$ (symmetrinen sulkeuma) ja $t(R)$ (transitiivinen sulkeuma)?
   (b) Muodosta $t(s(r(R)))$. Onko tässä tapauksessa $t(s(r(R))) = r(R) \cup s(R) \cup t(R)$?
   (c) Kuinka moneen ekvivalenssiluokkaan relaatio $t(s(r(R)))$ jakaa B:n? Esitä luokka $[a]$.

3. Tarkastellaan teoriaa (huom. alleviivaus liittyy vain tehtävään 4(a))
$$\underline{((A \wedge \neg B) \to C) \wedge \neg (C \vee B)} \to \neg A.$$
   (a) Mitkä ovat teorian premissit ja johtopäätös?
   (b) Todista teoria käyttäen interferenssisääntöjä ja tautologioita (ilman totuustaulua).

4. (a) Esitä tehtävän 3 teorian alleviivattu osuus täydellisessä disjunktiivisessa normaalimuodossa käyttäen apuna totuustaulua.
   Huom. Ei välttämättä tarvitse erikseen todistaa muotoja samoiksi tautologioilla.
   (b) Esitä seuraavainduktiivisesti määritelty joukko luetellen kaikki sen alkiot. Perustele vastauksesi.
   $\frac{1}{5}, \frac{2}{4}, \frac{3}{3} \in A.$
   Jos $a \in A \cap \mathbb{N}$, niin $-a \in A$.
   Jos $a \in A \cap (\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N})$, niin $a + 6 \in A$.
   Jos $a \in A \cap (\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z})$, niin $\frac{1}{a} \in A$.
   A sisältää vain ylläolevien ehtojen mukaisesti muodostuvat alkiot.

Antti Muutanen

Loogisia ekvivalensseja eli tautologioita

Negaatio	Disjunktio	Konjunktio	Implikaatio
$\neg\neg p = p$	$p \vee \mathbf{t} = \mathbf{t}$	$p \wedge \mathbf{t} = p$	$p \rightarrow \mathbf{t} = \mathbf{t}$
	$p \vee \mathbf{e} = p$	$p \wedge \mathbf{e} = \mathbf{e}$	$p \rightarrow \mathbf{e} = \neg p$
	$p \vee p = p$	$p \wedge p = p$	$\mathbf{t} \rightarrow p = p$
	$p \vee \neg p = \mathbf{t}$	$p \wedge \neg p = \mathbf{e}$	$\mathbf{e} \rightarrow p = \mathbf{t}$
			$p \rightarrow p = \mathbf{t}$
			$p \rightarrow q = \neg p \vee q$
			$p \rightarrow q = \neg q \rightarrow \neg p$
			$\neg(p \rightarrow q) = p \wedge \neg q$

Vaihdantalait	Liitäntälait	Osittelulait
$p \wedge q = q \wedge p$	$p \wedge (q \wedge r) = (p \wedge q) \wedge r$	$p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
$p \vee q = q \vee p$	$p \vee (q \vee r) = (p \vee q) \vee r$	$p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

De Morganin lait	Absorptio
$\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$	$p \wedge (p \vee q) = p$
$\neg(p \vee q) = \neg p \wedge \neg q$	$p \vee (p \wedge q) = p$
	$p \wedge (\neg p \vee q) = p \wedge q$
	$p \vee (\neg p \wedge q) = p \vee q$

Inferenssisääntöjä

MP $\dfrac{A,\ A \rightarrow B}{\therefore B}$	**MT** $\dfrac{A \rightarrow B,\ \neg B}{\therefore \neg A}$	**Conj** $\dfrac{A,\ B}{\therefore A \wedge B}$	**Simp** $\dfrac{A \wedge B}{\therefore A}$
Add $\dfrac{A}{\therefore A \vee B}$	**DS** $\dfrac{A \vee B,\ \neg B}{\therefore A}$	**HS** $\dfrac{A \rightarrow B,\ B \rightarrow C}{\therefore A \rightarrow C}$	

muista rajoitukset

UI $\dfrac{\forall x\, W(x)}{\therefore W(t)}$	**UG** $\dfrac{W(t)}{\therefore \forall x\, W(x)}$	**EG** $\dfrac{W(t)}{\therefore \exists x\, W(x)}$	**EI** $\dfrac{\exists x\, W(x)}{\therefore W(t)}$

Ekvivalensseja

$\neg\forall x\, W(x) = \exists x\, \neg W(x)$	$\neg\exists x\, W(x) = \forall x\, \neg W(x)$
$\exists x\, (A(x) \vee B(x)) = \exists x\, A(x) \vee \exists x\, B(x)$	$\forall x\, (A(x) \wedge B(x)) = \forall x\, A(x) \wedge \forall x\, B(x)$
$\exists x\, (A(x) \rightarrow B(x)) = \forall x\, A(x) \rightarrow \exists x\, B(x)$	$\forall x\, \forall y\, W(x,y) = \forall y\, \forall x\, W(x,y)$
$\exists x\, \exists y\, W(x,y) = \exists y\, \exists x\, W(x,y)$	

$\forall x\, (C \vee A(x)) = C \vee \forall x\, A(x)$	$\forall x\, (C \wedge A(x)) = C \wedge \forall x\, A(x)$
$\exists x\, (C \vee A(x)) = C \vee \exists x\, A(x)$	$\exists x\, (C \wedge A(x)) = C \wedge \exists x\, A(x)$
$\forall x\, (C \rightarrow A(x)) = C \rightarrow \forall x\, A(x)$	$\exists x\, (C \rightarrow A(x)) = C \rightarrow \exists x\, A(x)$
$\forall x\, (A(x) \rightarrow C) = \exists x\, A(x) \rightarrow C$	$\exists x\, (A(x) \rightarrow C) = \forall x\, A(x) \rightarrow C$

Implikaatioita

$\forall x\, A(x) \Rightarrow \exists x\, A(x)$	$\exists x\, (A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow \exists x\, A(x) \wedge \exists x\, B(x)$
$\forall x\, A(x) \vee \forall x\, B(x) \Rightarrow \forall x\, (A(x) \vee B(x))$	$\forall x\, (A(x) \rightarrow B(x)) \Rightarrow \forall x\, A(x) \rightarrow \forall x\, B(x)$
$\exists y\, \forall x\, W(x,y) \Rightarrow \forall x\, \exists y\, W(x,y)$	