

Algoritmimatematiikka

Tentti 18.02.2010

Ei laskinta tai kirjallista materiaalia. Tautologia- ja interferenssikokeelma kääntöpuolella.

Puolita saamasi konseptiarkit neljäksi A4-kokoiseksi paperiksi.
Kirjoita kunkin tehtävän ratkaisu eri paperille.
Eri tehtävien ratkaisupaperit kerätään erillisiin pinoihin.

- Olkoon $A = \{a, b, c\}$ ja $R = \{\langle a, a \rangle, \langle a, b \rangle, \langle b, a \rangle, \langle b, c \rangle\}$.
 - Mitä seuraavista relaatio R on ja miksi: refleksiivinen, symmetrinen, transitiivinen, ekvivalenssirelaatio?
 - Esitä relaation R refleksiivinen sulkeuma $r(R)$, symmetrinen sulkeuma $s(R)$ ja transitiivinen sulkeuma $t(R)$ sekä joukko R^2 .
- Mikä/mitkä ovat teorian $((A \vee B) \rightarrow (C \wedge D)) \rightarrow (B \rightarrow D)$ premissi(t) ja johtopäätös? Todista teoria käyttäen interferenssisääntöjä.
(Huom. Todistus muulla tavalla tuottaa enintään 3 pistettä.)
- (a) Tarkastellaan rekursiivisesti esitettyä funktiota

$$f(x, L) = \begin{cases} \langle x \rangle, & \text{jos } L = \langle \rangle \\ \text{cons}(x, L), & \text{jos } x \leq \text{head}(L) \\ \text{cons}(\text{head}(L), f(x, \text{tail}(L))) & \text{muuten} \end{cases}$$

Tässä $\text{cons}(x, L)$ tarkoittaa alkion x lisäämistä ensimmäiseksi listaan L . Esitä yksityiskohtaisesti kaikki rekursion vaiheet läpikäyden, mitä ovat $f(3, \langle 2, 1, 5 \rangle)$ ja $f(4, \langle 3 \rangle)$

- Todista, että $n^3 - 2n^2 + n - 4 = O(n^3)$, kun $n \in \mathbb{N}$.

- Tarkastellaan joukkoja

$$A = \{x \in \mathbb{N} : \text{floor}(\log_2 x) = 2\}$$

$$B = \{x \in \text{Lists}\{\{a, b, c\}\} : \text{jonon } x \text{ pituus on } 1\}$$

- Esitä joukot A ja B luetellen kaikki niiden alkiot.
- Vastaa kysymyksiin perustellen:
 - Onko funktion $f : A \rightarrow B$ mahdollista olla injektio?
 - Onko funktion $f : A \rightarrow B$ mahdollista olla surjektio?
 - Päteekö $\forall x \in A \exists y \in \mathbb{N} : x = 4 + y \bmod 4$?
 - Onko joukon B mahtavuus $|B| = 5$?

(Huom. Jos et osaa kohtaa (a), voit kuitenkin vastata kohtaan (b), kun keksit itse jotkin kaksi joukkoa A_1 ja B_1 siten, että ne ovat epätyhjiä ja lisäehtona tässä tapauksessa on, että B_1 :ssä on enemmän alkioita kuin A_1 :ssa.)

Mikko
Gundlach

Loogisia ekvivalensseja eli tautologioita

| Negaatio | Disjunktio | Konjunktio | Implikaatio |
|------------------|---------------------|-----------------------|---|
| $\neg\neg p = p$ | $p \vee t = t$ | $p \wedge t = p$ | $p \rightarrow t = t$ |
| | $p \vee e = p$ | $p \wedge e = e$ | $p \rightarrow e = \neg p$ |
| | $p \vee p = p$ | $p \wedge p = p$ | $t \rightarrow p = p$ |
| | $p \vee \neg p = t$ | $p \wedge \neg p = e$ | $e \rightarrow p = t$ |
| | | | $p \rightarrow p = t$ |
| | | | $p \rightarrow q = \neg p \vee q$ |
| | | | $p \rightarrow q = \neg q \rightarrow \neg p$ |
| | | | $\neg(p \rightarrow q) = p \wedge \neg q$ |

| Vaihdantalait | Liitântälait | Osittelulait |
|---------------------------|---|--|
| $p \wedge q = q \wedge p$ | $p \wedge (q \wedge r) = (p \wedge q) \wedge r$ | $p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ |
| $p \vee q = q \vee p$ | $p \vee (q \vee r) = (p \vee q) \vee r$ | $p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ |

| De Morganin lait | Absorptio |
|---|---|
| $\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$ | $p \wedge (p \vee q) = p$ |
| $\neg(p \vee q) = \neg p \wedge \neg q$ | $p \vee (p \wedge q) = p$ |
| | $p \wedge (\neg p \vee q) = p \wedge q$ |
| | $p \vee (\neg p \wedge q) = p \vee q$ |

Inferenssisääntöjä

| | | | |
|--|--|--|--|
| MP $\frac{A, A \rightarrow B}{\therefore B}$ | MT $\frac{A \rightarrow B, \neg B}{\therefore \neg A}$ | Conj $\frac{A, B}{\therefore A \wedge B}$ | Simp $\frac{A \wedge B}{\therefore A}$ |
| Add $\frac{A}{\therefore A \vee B}$ | DS $\frac{A \vee B, \neg B}{\therefore A}$ | HS $\frac{A \rightarrow B, B \rightarrow C}{\therefore A \rightarrow C}$ | |

muista rajoitukset

| | | | |
|---|---|---|---|
| UI $\frac{\forall x W(x)}{\therefore W(t)}$ | UG $\frac{W(t)}{\therefore \forall x W(x)}$ | EG $\frac{W(t)}{\therefore \exists x W(x)}$ | EI $\frac{\exists x W(x)}{\therefore W(t)}$ |
|---|---|---|---|

Ekvivalensseja

| | |
|---|---|
| $\neg\forall x W(x) = \exists x \neg W(x)$ | $\neg\exists x W(x) = \forall x \neg W(x)$ |
| $\exists x (A(x) \vee B(x)) = \exists x A(x) \vee \exists x B(x)$ | $\forall x (A(x) \wedge B(x)) = \forall x A(x) \wedge \forall x B(x)$ |
| $\exists x (A(x) \rightarrow B(x)) = \forall x A(x) \rightarrow \exists x B(x)$ | $\forall x \forall y W(x, y) = \forall y \forall x W(x, y)$ |
| $\exists x \exists y W(x, y) = \exists y \exists x W(x, y)$ | |

| | |
|---|---|
| $\forall x (C \vee A(x)) = C \vee \forall x A(x)$ | $\forall x (C \wedge A(x)) = C \wedge \forall x A(x)$ |
| $\exists x (C \vee A(x)) = C \vee \exists x A(x)$ | $\exists x (C \wedge A(x)) = C \wedge \exists x A(x)$ |
| $\forall x (C \rightarrow A(x)) = C \rightarrow \forall x A(x)$ | $\exists x (C \rightarrow A(x)) = C \rightarrow \exists x A(x)$ |
| $\forall x (A(x) \rightarrow C) = \exists x A(x) \rightarrow C$ | $\exists x (A(x) \rightarrow C) = \forall x A(x) \rightarrow C$ |

Implikaatioita

| | |
|---|---|
| $\forall x A(x) \Rightarrow \exists x A(x)$ | $\exists x (A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow \exists x A(x) \wedge \exists x B(x)$ |
| $\forall x A(x) \vee \forall x B(x) \Rightarrow \forall x (A(x) \vee B(x))$ | $\forall x (A(x) \rightarrow B(x)) \Rightarrow \forall x A(x) \rightarrow \forall x B(x)$ |
| $\exists y \forall x W(x, y) \Rightarrow \forall x \exists y W(x, y)$ | |