

Vastaa jokaiseen kysymykseen ja perustele vastauksesi huolellisesti, lyhyesti ja ytimekkäästi. Tentissä ei saa käyttää muistiinpanoja, kirjallisuutta eikä laskinta.

Kirjoita kaikkiin papereihin selkeästi nimesi, opiskelijanumerosi ja koulutusohjelmasi.

1. Olkoot A ja B joukkoja. Osoita oikeaksi tai vääräksi seuraavat väitteet. (Merkintä $\mathcal{P}(A)$ tarkoittaa joukon A potenssijoukkoa.)

(a) $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$

(b) $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$

2. Määritellään joukossa $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - \{0\})$ binäärinen relaatio R seuraavasti:

$$\langle a, b \rangle R \langle c, d \rangle \quad \text{jos ja vain jos} \quad ad = cb.$$

Osoita, että R on ekvivalenssirelaatio.

3. Osoita, että parillisten kokonaislukujen joukko $\mathcal{E} = \{n \in \mathbb{Z} : n = 2k, k \in \mathbb{Z}\}$ ja parittomien kokonaislukujen joukko $\mathcal{O} = \{n \in \mathbb{Z} : n = 2k + 1, k \in \mathbb{Z}\}$ ovat yhtämahtavat.

4. Teoria

$$((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow (C \wedge D))) \wedge (\neg C \vee (\neg E \vee F)) \wedge (A \wedge E) \rightarrow F$$

on pätevä seuraavan todistuksen mukaisesti. Kysymysmerkkien paikoilta kuitenkin puuttuvat kaikki perustelut. Perustele todistuksen päättelyaskelet.

1.	$A \rightarrow B$?
2.	$B \rightarrow (C \wedge D)$?
3.	$\neg C \vee (\neg E \vee F)$?
4.	$A \wedge E$?
5.	$A \rightarrow (C \wedge D)$?
6.	A	?
7.	$C \wedge D$?
8.	C	?
9.	$\neg(C \wedge E) \vee F$?
10.	E	?
11.	$C \wedge E$?
12.	F	?
M.O.T.		?

5. Todista induktiolla, että jos $n \in \mathbb{N}$, niin $n^3 + 2n$ on jaollinen 3:lla.